1

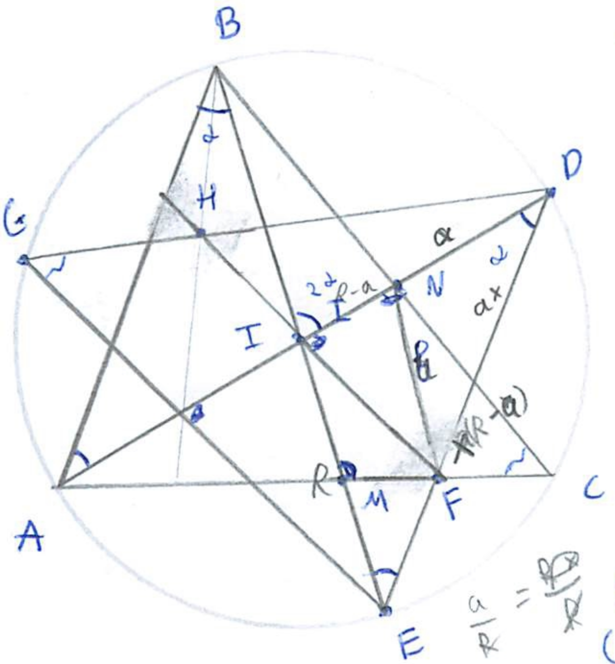
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის 1

მაგიდა № 10	25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 1 — გვერდი № 1



რადგან $\angle ABE$ და $\angle ADE$
ეყრდნობიან ერთსა და იმავე რკალს
ტოლია. ასევე $\angle BAD=\angle BED$
და რადგან BE და AD-ს
გადაკვეთის წერტილი ცენტრია
$\angle ABE=\angle ADE=\angle BAD=\angle BED$
მაშინ $\angle BIA=\angle DIE$
ამიტომ $\overset{\frown}{AGB}=\overset{\frown}{ED}$
ასევე $BA \parallel DE$
(იგივე შეიძლება)
$BC \parallel EG$ მაშინ
ასევე $BC=EG$
რადგან $\triangle AIB=\triangle EID$
რადგან კუთხეები და გვერდები
$(AI=ID=IB=IE)$

~~(რადგან I ცენტრია ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მაშინ ის ასევე ორის სიმეტრიის გადაკვეთის წერტილი და რადგან $\angle AMB=\frac{AGB+EC(\text{ვარ.})}{2}=90°$ და ასევე $\angle ANB=\frac{AGB+DC(\text{ვარ})}{2}=90°$) $\Rightarrow$ $EC(\text{ვარ.})=CD(\text{ვარ})$ და გამოდის რომ)~~ ასევე გამოდის რომ $\overset{\frown}{AG}(\text{ვარ})=\overset{\frown}{EC}(\text{ვარ})$

$\cancel{R^2=R^2+z^2-2Rz\cos\alpha}$

$\cancel{2Rz\cos\alpha=z^2}$ $\cancel{\cos\alpha=\frac{z^2}{2Rz}=\frac{z}{2R}}$ $\cancel{z=2R\cos\alpha}$

$NF \parallel IE$

$\cancel{a^2=a^2+x^2-2a^2x\cos\alpha}$ $\cancel{\cos\alpha=\frac{x^2+x}{2a^2}=\frac{x}{2}}$

$\cancel{R^2=a^2+R^2x^2-4Ra^2x\cos\alpha}$ $\cancel{\frac{z}{R}=aRx}$

1

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის 2

მაგიდა № 10

25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

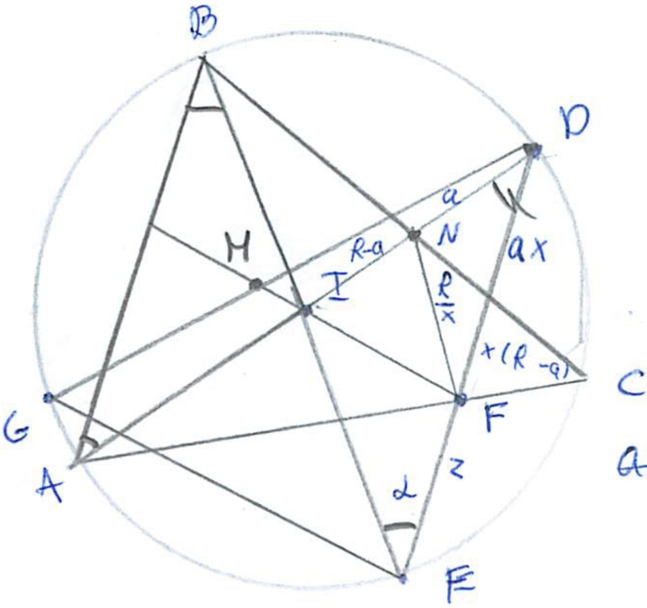
$$\cancel{R^2} = \cancel{R^2} + (Rx+z)^2 - 2R(Rx+z)\cos\alpha$$

$$2R(\cancel{Rx+z})\cos\alpha = (Rx+z)^{\cancel{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{Rx+z}{2R}$$

$$z = 2R\cos\alpha - Rx$$

$$\cancel{\frac{ax}{2R(\cos\alpha - (R+a)x}}$$



$$\cancel{a^2 + R^2 = a^2 + R^2x^2 - 2aRx\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \cancel{\frac{R^2x^2}{2aRx}} = \frac{Rx}{2a}$$

ეს სამკუთხედი $\Delta ABC = \Delta EDG$

ესეიგი I-ს მიმართ ΔABC მობრუნებულია $180-\alpha$ კუთხით

(ვიცით H არის AB-ზე ვაჩვენეთ რომ)

2

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის 6

მაგიდა №

25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

$f(0:1) \to (0:1)$

$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{თუ } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{თუ } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$

$0 < a < b < 1 \quad a_0 = a \quad b_0 = b \quad a_n = f(a_{n-1}) \quad b_n = f(b_{n-1})$

$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$ ვ. დ.

თუ გვაქვს $f(x) = x + \frac{1}{2}$ მაშინ $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \neq 0$

$(a_{n-1}^2 - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) =$

ვიცით რომ $\frac{1}{2} \le a_{n-1} < 1$ და $\frac{1}{4} \le a_{n-1}^2 < 1$

თუ დავამტკიცებთ რომ $\frac{1}{4} \le a_{n-1}^2 < 1$

$-1 < a_{n-1} \le -\frac{1}{2}$ $\qquad -\frac{3}{4} \le a_{n-1}^2 - a_{n-1} \le \frac{1}{2}$

ესეცი შეიძლება მაგრამ

ნუ მოვიყვანოთ

ვიპოვოთ $a_{n-1} = \frac{1}{2}$ და ვაჩვენოთ.

6

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის 3

მაგიდა № 10

25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$

ვნახოთ ორი შემთხვევა როდესაც $x>y$ და $y>x$

1) $x>y$

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$

$7x^2-14xy+7y^2+xy=(x-y+1)^3$

$7(x-y)^2+xy=(x-y+1)^3$ აღვნიშნოთ $x-y=z$

$7z^2+xy=z^3+3z^2+3z+1$

$z^3-4z^2+3z=xy-1$

$z(z-1)(z-3)=xy-1$

$(x-y)(x-y-1)(x-y-3)=xy-1$

$x-y:2$ რადგან $z(z-1)$ ორი მომდევნო რიცხვის ნამრავლი ლუწია ესე იგი $xy-1$ ლუწია მაშ. ესე იგი გამოდის xy კენტი ესე იგი x-ც და y-ც კენტი იქნება მათი სხვაობა ლუწი იქნება $z:2$ $x-y:2$

რადგან $(z-1)(z-3)$ და ვიცით რომ $z:2$ მაშინ ეს ნამრავლი იყოფა 3-ზე.

ესე იგი გამოდის რომ $xy-1 \vdots 6$

x-კენტი y-კენტი რადგან $(z-1)(z-3):3$

მაშინ $x-y\equiv0 \pmod 3$ ან $x-y\equiv1 \pmod 3$

თუ $x-y\equiv1 \pmod 3$ მაშინ $x-y-3\equiv1 \pmod 3$

გამოდის რომ $(x-y)(x-y-1)(x-y-3)\equiv1 \pmod 3$

რადგან $xy-1:6$ $xy-1=6/12/18/24$ ....

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

4

მაგიდა № 10	25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 3 — გვერდი № 2

$\cancel{xy-1} = 6$ $\quad xy = 1\cdot 7$ ან $xy = -7\cdot(-1)$ $\quad$ | $xy-1=0 \quad xy=1$
$x=7 \quad y=1 \qquad x=-1 \quad y=-7$ $\quad$ | $xy = 1\cdot 1 \quad x\cdot y = -1(-1)$
შევამოწმოთ $6\cdot 5\cdot 3 \neq 7 \qquad 6\cdot 5\cdot 3 \neq 7$ $\quad$ | ვიღებთ ამონახსნს $(1;1) \quad (-1;-1)$

$xy-1=12 \quad xy=1\cdot 13 \qquad xy=-1\cdot(-13)$
ეს ვერ და არც ეს [illegible] $x-y \equiv 1 \pmod 3$

$xy-1=18 \quad xy=19\cdot 1$ ან $xy=-1(-19)$ არც ეს

$xy-1=24 \quad xy=25$ ვნახოთ $xy=5\cdot 5$ ~~$xy=$~~ არ
ეს ვერ და [illegible] [illegible] [illegible]

$xy-1=30 \quad xy=31$ არც ეს

$xy-1=36 \quad xy=37$

xy

$\vdots$

[illegible] [illegible] $xy-1=6k \quad xy=6k+1$ ეს
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] და
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ეს არ [illegible]
[illegible] ვნახოთ $x-y = 0 \pmod 3$
მაშინ ვამოწმოთ რომ $(x-y)(x-y-1)(x-y-3) \vdots 9$
მაშინ ვამოწმოთ რომ $xy-1 \vdots 18$
ე.ი. [illegible] $xy-1=18k \quad xy=18k+1$
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
არ [illegible] [illegible] $(1;1)$ და $(-1;-1)$

2) $y < x$.
$7x^2 - 13xy + 7y^2 = (-(x-y)+1)^3 \quad x-y=z$
$7z^2 + xy = (-z+1)^3 = (1-z)^3$.

4

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის 5

მაგიდა № 10

25.04.2015/ მათ/III/ 620

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

$7z^2+xy = 1-3z+3z^2-z^3$

$z^3+4z^2+3z = 1-xy$

$z(z+1)(z+3) = 1-xy.$

$(x-y)(x-y+1)(x-y+3) = 1-xy$

ვავარაუდოთ იგივე ვამოწმე, რომ x და y კენტია

$1-xy \vdots 6$ და $x-y\equiv 0 \pmod 3$ ან $x-y\equiv 1 \pmod 3$

როდესაც $x-y=1 \pmod 3)$ მაშინ

ვამოწმებ რომ $1-xy=6k$ $\cancel{x}y=1-6k=-(6k-1)$

ამ შემთხვევაში რომელიც ზოგადი $6k-1$ მარტივია

ან ~~[illegible]~~ [illegible] $(1;1)$ $(-1;-1)$

[illegible]

როდესაც $x-y=0 \pmod 3)$ მაშინაც

იგივე $xy=1-18k=-(18k-1)$

ამიტომ არ გვაქვს ოთხ სხვა ვარიანტი $(1;1)$ $(-1;-1)$

პასუხი $(1;1)$ და $(-1;-1)$

შემოწმება:

$7x^2+7y^2-13xy=(|x-y|+1)^3$

$7+7-13=1^3$ სწორია

$7(-1)^2+7(-1)^2-13=1^3$ სწორია რ.ს.დ.